SKALÁRNÍ SOUČIN

V … vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

EUKLEIDOVSKÝ SKALÁRNÍ SOUČIN na V je zobrazení $g: V \times V \to \mathbb{R}$ s násl. vlastnostmi:

$\forall u, v, w \in V$ a $\forall a \in \mathbb{R}$ platí

1) $g(u+v, w) = g(u, w) + g(v, w)$

$g(au, w) = a\, g(u, w)$

2) $g(u, v) = g(v, u)$

3) Pro $u \neq 0$ platí $g(u, u) > 0$.

Příklad 1) $V = \mathbb{R}^3$ $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

2) $V = \mathbb{R}^n$ $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $u, v \in V$

$$g(u, v) = a_1 u_1 v_1 + \dots + a_n u_n v_n$$

$v \in V$ $\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$ se nazývá DÉLKA VEKTORU v.

Pokud $\|v\| = 1$, pak v je NORMOVANÝ.

$v \neq 0$ pak $\frac{v}{\|v\|}$ je normovaný.

Označení $g(u, v) = (u, v)$

Cauchy-Buňakovského-Schwarzova nerovnost

$u, v \in V$

$$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou u, v závislé.

Důkaz pro $u = 0$ nebo $v = 0$ platí rovnost

Předp., že $u \neq 0 \neq v$ a $\|u\| = \|v\| = 1$.

$$0 \leq \frac{1}{2}\|u \pm v\|^2 = \frac{1}{2}(u \pm v, u \pm v) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((u, u \pm v) \pm (v, u \pm v)\Big) = \frac{1}{2}\Big((u,u) \pm (u,v) \pm (v,u) +$$

$$+ (v,v)\Big) = \frac{1}{2}\Big((u,u) \pm 2(u,v) + (v,v)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2 \pm 2(u,v)\Big) = 1 \pm (u,v)$$

$$\mp (u,v) \leq 1 \implies |(u,v)| \leq 1.$$

Trojúhelníková nerovnost

$u, v \in V$ Pak $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

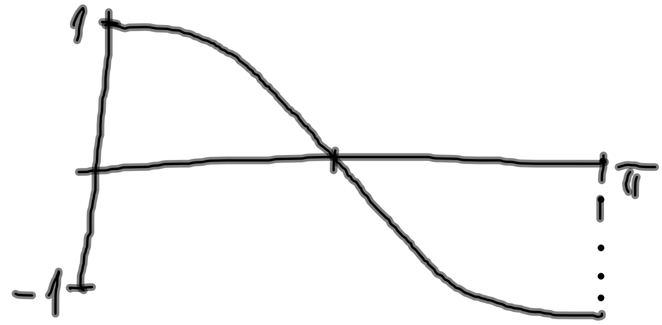
rovnost platí právě tehdy, když u, v jsou lin. záv.

Důkaz $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2 \leq$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{|(u,v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \Rightarrow$$

$$-1 \leq \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$



Pro $u, v \in V$ $\exists! \, \varphi \in [0, \pi]$ tak, že

$$\cos \varphi = \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Číslo φ se nazývá ODCHYLKA VEKTORŮ u, v.

Říkáme, že vektory $u, v \in V$ jsou KOLMÉ (ORTOGONÁLNÍ), jestliže $(u,v) = 0$ $(u \perp v)$.

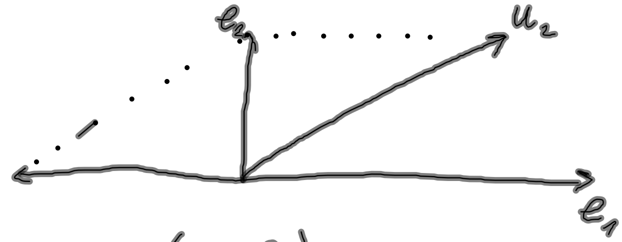
Množina vektorů $u_1, \dots, u_n$ se nazývá ORTOGONÁLNÍ, je-li $u_i \perp u_j$ pro $i \neq j$.
Jsou-li navíc $u_1, \dots, u_n$ normované, nazývají se ORTONORMÁLNÍ.

Gramm-Schmidtova ortogonalizace

Tvrzení V každém konečněrozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

$u_1, \dots, u_n$ báze

$e_1 = u_1$



$$e_2 = u_2 - \frac{(u_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$$

$$(e_1, e_2) = \left(e_1, u_2 - \frac{(u_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1\right) =$$

$$= (e_1, u_2) - \left(e_1, \frac{(u_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1\right) =$$

$$= (e_1, u_2) - \frac{(u_2, e_1)}{(e_1, e_1)} (e_1, e_1) =$$

$$= (e_1, u_2) - (u_2, e_1) = 0$$

Předp., že máme $e_1, \dots, e_k$ navzájem kolmé.

$$e_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

Dostáváme ortogonální bázi. Znormalizujeme.

Souřadnice $(x_1, \dots, x_n)$ vektoru u vzhledem k ortonormální bázi $e_1, \dots, e_n$ jsou $x_i = (u, e_i)$.

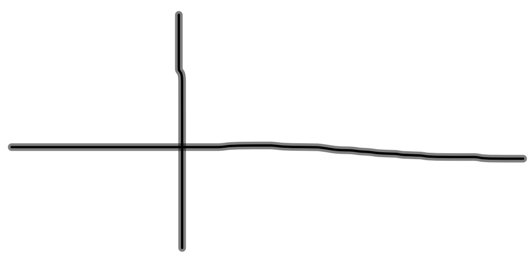
ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK

$U \subseteq V$ podprostor

$$U^{\perp} = \{ v \in V \mid v \perp u \text{ pro všechna } u \in U \}$$

se nazývá ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK podpr. U.

Tvrzení $U^{\perp}$ je podprostor.



Tvrzení V konečněrozm. vekt. pr., $\dim = n$, pak

$$\underline{V = U \dotplus U^{\perp}} \quad \text{a} \quad \dim U^{\perp} = n - \dim U.$$

Tvrzení V vekt. pr., U, U_1, U_2 podprostory

1) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1^{\perp} \supseteq U_2^{\perp}$

2) $U^{\perp\perp} = U$

3) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$

4) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$